

1. Theorie

Auf einer (Monochord-)Saite der Länge L ist eine punktförmige Masse m festigt, und zwar, wie in Abbildung 1 dargestellt, im Abstand x_0 von einem der beiden Enden. Die Saite stehe unter der Zugkraft T und ihr Material habe die Dichte ρ . Untersucht werden sollen die freien transversalen Schwingungen dieses Systems. Die nachfolgende Rechnung orientiert sich an dem Artikel *Transverse Vibrations of Strings* der *Access Engineering Library* in Internet¹.

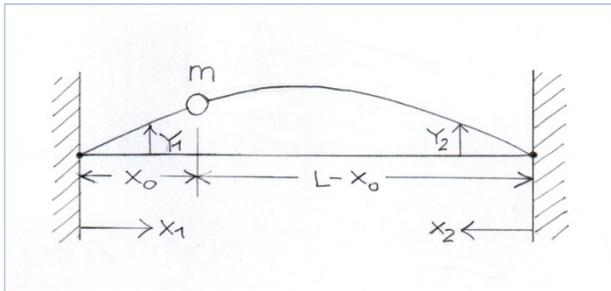


Abbildung 1 Beiderseits eingespannte schwingende Saite der Länge L mit einer punktförmigen Masse m an der Stelle x_0 .

Wir betrachten die Abschnitte links und rechts vom Ort x_0 der Masse zunächst getrennt. Dabei zählen wir die Koordinaten in der Längsrichtung (x -Richtung) vom jeweiligen Ende aus – das erleichtert die Lösung. Es sind also zwei getrennte Koordinaten, wir nennen sie x_1 und x_2 (siehe Abbildung). Die Auslenkungen in transversaler Richtung (y -Richtung) heißen dem entsprechend y_1 und y_2 . Damit lauten die Bewegungsgleichungen

$$(1) \quad \begin{aligned} T \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} &= \rho \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} & (0 < x_1 < x_0) \\ T \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} &= \rho \frac{\partial^2 y_2}{\partial t^2} & (0 < x_2 < L - x_0) \end{aligned}$$

Das sind Wellengleichungen, deren Lösungen man als

$$(2) \quad \begin{aligned} y_1(x_1, t) &= Y_1(x_1) \sin(\omega_1 t + \phi_1) \\ y_2(x_2, t) &= Y_2(x_2) \sin(\omega_2 t + \phi_2) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} Y_1(x_1) &= A_1 \sin(k_1 x_1) + B_1 \cos(k_1 x_1) \\ Y_2(x_2) &= A_2 \sin(k_2 x_2) + B_2 \cos(k_2 x_2) \end{aligned}$$

angeben kann. Dabei ist

$$(3) \quad \omega_1 = k_1 \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad \text{und} \quad \omega_2 = k_2 \sqrt{\frac{T}{\rho}} .$$

Die Randbedingungen $y_1(0, t) = 0$ und $y_2(0, t) = 0$ erfordern $Y_1(0) = 0$ und $Y_2(0) = 0$ und damit

$$(4) \quad B_1 = B_2 = 0.$$

Weitere Einschränkungen folgen aus den Bedingungen an der Kopplungsstelle x_0 . An dieser befindet sich die Masse m , also müssen dort die transversalen Auslenkungen y_1 und y_2 gleich sein. Das heißt, es gilt

$$(5) \quad y_1(x_0, t) = y_2(L - x_0, t)$$

oder

$$(6) \quad A_1 \sin(k_1 x_0) \cdot \sin(\omega_1 t + \phi_1) = A_2 \sin[k_2(L - x_0)] \cdot \sin(\omega_2 t + \phi_2) .$$

Damit diese Gleichung für alle Zeiten t erfüllt ist, muss gelten $\omega_1 = \omega_2$ und $\phi_1 = \phi_2$. Daraus folgt weiterhin $k_1 = k_2$. Wir setzen also $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ und $k_1 = k_2 = k$ und erhalten aus Gleichung (6)

$$(7) \quad A_1 \sin(k x_0) = A_2 \sin[k(L - x_0)] .$$

Die zweite Randbedingung an der Stelle x_0 folgt aus einer Betrachtung der Kräfte, die an der Masse m angreifen. Abbildung 2 zeigt, in welcher Weise die Saite bei x_0 mit m verbunden ist: Die Winkel gegenüber der Horizontalen, unter denen die Saite links und rechts an der Masse m angreift, hier mit α_1 bzw. α_2 bezeichnet, sind *nicht* gleich. Man kann daher die Beträge der Ableitungen von y_1 und y_2

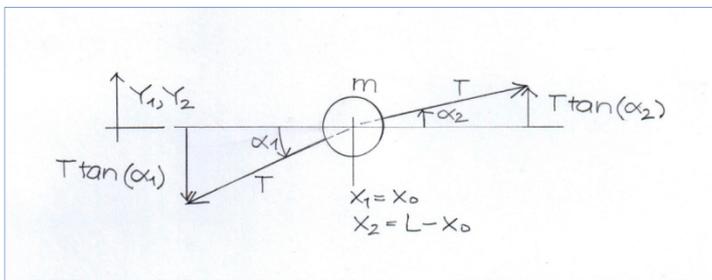


Abbildung 2 Kräfte auf die punktförmige Masse der Saite. Die Saite steht unter der Zugkraft T .

an der Kopplungsstelle nicht gleichsetzen. Die Ableitungen sind jedoch durch die newtonsche Gleichung für m miteinander verknüpft. In y -Richtung greift die (Netto-)Kraft

$$(8) \quad T \tan(\alpha_2) - T \tan(\alpha_1) = T \left(-\frac{\partial y_2}{\partial x_2} \right) \Big|_{L-x_0, t} - T \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_0, t}$$

an. Nach Newton ist daher

$$(9) \quad m \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \Big|_{x_0, t} = T \left(-\frac{\partial y_2}{\partial x_2} \right) \Big|_{L-x_0, t} - T \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_0, t} .$$

Die Terme für y_1 und y_2 in Gleichung (2) ließen sich durch die bisher betrachteten Randbedingungen vereinfachen – wir konnten

$$B_1 = B_2 = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega, \quad \phi_1 = \phi_2 = \phi \quad \text{und} \quad k_1 = k_2 = k$$

setzen. Sie lauten also

$$(10) \quad \begin{aligned} y_1(x_0, t) &= A_1 \sin(k x_0) \cdot \sin(\omega t + \phi) \\ y_2(L - x_0, t) &= A_2 \sin[k(L - x_0)] \cdot \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} .$$

In Gleichung (9) gehen einige ihrer Ableitungen ein. Wir erhalten

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \Big|_{x_0, t} = -m \omega^2 A_1 \sin(k x_0) \sin(\omega t + \phi)$$

und

$$T\left(-\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)\Big|_{L-x_0, t} - T\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)\Big|_{x_0, t} = -TA_2 k \cos[k(L-x_0)]\sin(\omega t + \phi) - TA_1 k \cos(k x_0)\sin(\omega t + \phi) .$$

Die rechten Seiten der beiden Terme, eingesetzt in Gleichung (9), ergeben nach Division beider Seiten durch $\sin(\omega t + \phi)$

$$(12) \quad -TA_2 k \cos[k(L-x_0)] - TA_1 k \cos(k x_0) = -m \omega^2 A_1 \sin(k x_0) .$$

Gleichungen (7) und (12) bilden ein homogenes lineares Gleichungssystem in den Unbekannten A_1 und A_2 . In Matrixform geschrieben, lauten sie

$$(13) \quad \begin{bmatrix} \sin(k x_0) & -\sin[k(L-x_0)] \\ (m \omega^2 / T)\sin(k x_0) - k \cos(k x_0) & -k \cos[k(L-x_0)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Nichttriviale Lösungen gibt es dann, wenn die Gleichungsdeterminante verschwindet, d.h. wenn gilt

$$(14) \quad -\sin(k x_0) \cdot k \cos[k(L-x_0)] + \sin[k(L-x_0)] \cdot [(m \omega^2 / T)\sin(k x_0) - k \cos(k x_0)] = 0 .$$

Wir dividieren durch $k \cdot \sin(k x_0) \cdot \sin[k(L-x_0)]$ und erhalten

$$-\cot[k(L-x_0)] + \frac{m \omega^2}{T k} - \cot(k x_0) = 0$$

oder, wegen $\omega^2 = k^2 c^2$ (c = Phasengeschwindigkeit des Schalls im Material der Saite)

$$(15) \quad \cot(k x_0) + \cot[k(L-x_0)] = \frac{m k c^2}{T} .$$

Diese transzendente Gleichung ist nur numerisch lösbar. Sie liefert die Eigenwerte k (oder kL) der Matrix in Gleichung (13) und damit die (Eigen-)Frequenzen f , mit denen die Saite schwingt ($k = 2\pi f/c$).

2. Experiment

2.1 Eigenfrequenzen als Funktion der Position x_0 der Masse auf der Saite

Die Eigenfrequenzen f hängen, wie Gleichung (15) zeigt, von der Position x_0 der Masse m auf der Saite ab. Professionelle Experimente dazu werden von Gidion² beschrieben. Sie müssten, meinte ich, auch auf der niedrig geschraubten Hobby-Ebene möglich sein. Meine Gitarre, genauer die *d*-Saite dieses

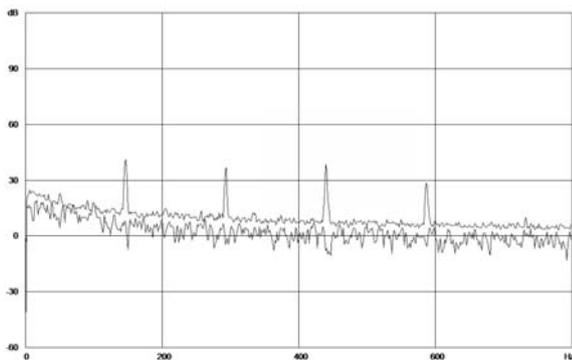


Abbildung 3 Spektrum der leeren D-Saite der Gitarre. Das Spektrum (oberer Linienzug) wurde über einige Millisekunden gemittelt, ist daher weniger verrauscht als der nicht gemittelte Untergrund (unterer Linienzug). Peaks, von links: Grundton *d* (147 Hz), Oktave *d*1 (294 Hz), Quinte über der Oktave *a*1 (440 Hz) und zweite Oktave *d*2 (587 Hz).

Instruments, erschien als Versuchsobjekt geeignet. Ich aktivierte auf meinem PC das FFT-Programm³, das den vom Mikrophon aufgenommenen Ton nach Frequenzen analysiert und als Spektrum darstellt, und

nahm das Instrument nach Jahren wieder einmal zur Hand. Die Saite wurde zunächst auf die Soll-Frequenz 147 Hz abgestimmt (temperierte Stimmung mit Kammerton 440 Hz). Wie erwartet, zeigte sich das d – behutsam gezupft, damit nicht durch Störgeräusche verdeckt – im Spektrum in Form mehrerer Peaks: Grundton und einige höhere Harmonische waren sichtbar (Abbildung 3). Dann schnitt ich ein kleines Stück Aluminium-Blech (rechteckig, $5 \times 17 \text{ mm}^2$) zurecht (dessen Gewicht meine Briefwaage nicht mehr anzeigte, so dass ich es schätzen musste), falzte es in der Mitte und klemmte das Metallstück irgendwo auf der Saite fest. Das sollte die punktförmige Masse darstellen. Sie zeigte tatsächlich Wirkung: Erneutes Zupfen der D -Saite ergab, dass sich die Frequenz des Tons vermindert hatte.

Der erste Erfolg verlangte nach einer systematischen Untersuchung. Ich veränderte also die Lage meiner Aluminium-Klammer und beobachtete die Abhängigkeit der Frequenz f von der Position x_0 , und zwar für die ersten drei Harmonischen (Grundton, Oktave und Quinte über der Oktave). Die Änderung von f war zwar nur von der Größenordnung Prozent, aber durchaus messbar. Tabelle 1 zeigt das Ergebnis.

Tabelle 1 Messdaten der Eigenfrequenzen der ersten drei Harmonischen (Grundton f_1 , zweite Harmonische f_2 , dritte Harmonische f_3) einer mit einer Punktmasse belasteten Gitarren-Saite (Nylon-d-Saite) der Länge $L = 65 \text{ cm}$. Die Größe x_0 ist die Position der Punktmasse auf der Saite. Als Punktmasse wird ein Aluminium-Metallstück der Masse $m = 0,04 \pm 0,01 \text{ g}$ (Gramm) verwendet.

x_0/cm	x_0/L	f_1/Hz	f_2/Hz	f_3/Hz
0	0	147	296	439
10	0,1539	144	277	407
13	0,2000	142	271	415
18	0,2769	140	274	432
25	0,3846	137	285	431
29	0,4462	136	291	414
32,5	0,5000	136	294	410
36	0,5539	136	293	413
44	0,6769	138	277	438
51	0,7846	142	271	420
55,3	0,8508	143	276	416
58	0,8923	145	282	411
65	1,0000	147	297	441

Die Daten der Tabelle sind in Abbildung 4 dargestellt. Die Messpunkte stimmen dem Verlauf nach mit den von Gidion² gemessenen überein. Ein Vergleich mit der Theorie ist nur bedingt möglich, da genaue Werte von m , c und T (Gleichung 15) nicht bekannt sind.

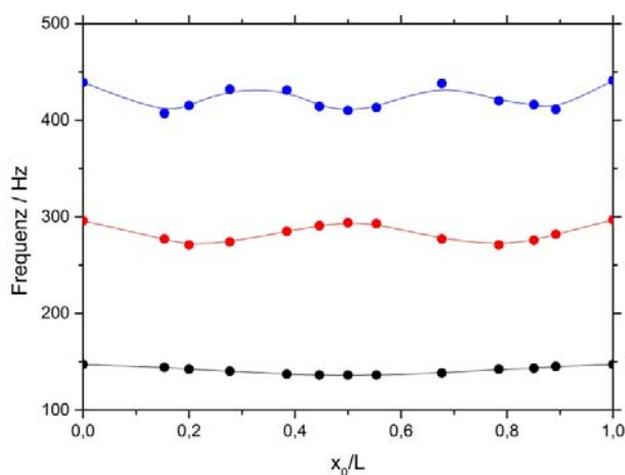


Abbildung 4 Eigenfrequenzen der ersten drei Harmonischen (schwarz: Grundton f_1 , rot: zweite Harmonische f_2 , blau: dritte Harmonische f_3) einer mit einer Punktmasse belasteten Gitarren-Saite (Nylon-d-Saite) der Länge $L = 65 \text{ cm}$. Daten der Tabelle 1. Die Punktmasse ist eine Aluminium-Klammer der Masse $m = 0,04 \pm 0,01 \text{ g}$ (Gramm). Gemessen wurde für eine Reihe von Positionen x_0 der Klammer auf der Saite. Durch die Messpunkte wurden Ausgleichskurven gelegt. Der Verlauf der Kurven (und Messpunkte) stimmt mit dem von Gidion² gemessenen überein.

Im Fall $x_0 = 0$ (oder $x_0 = L$) lässt sich prüfen, ob die Daten plausibel sind. Die Frequenz f_1 an der Stelle $x_0 = 0$ (oder $x_0 = L$) sollte mit der Grundfrequenz (der ersten Harmonischen) einer masselosen Saite übereinstimmen. In diesen Fall wäre die Frequenz gegeben durch

$$(16) \quad f = \frac{c}{2L} .$$

Aus unserem Wert $f_1(x_0 = 0) = 147$ Hz und $L = 0,65$ m ergäbe sich eine Schallgeschwindigkeit (im Material der Saite) von $c = 191$ m/s. Daraus ließe sich mit Hilfe von

$$(17) \quad c^2 = \frac{T}{\mu} = \frac{T}{\rho A}$$

(μ = Massenbelegung (kg/m), ρ = Dichte und A = Querschnittsfläche der Saite) die Zugkraft T abschätzen: Die Saite hat einen Durchmesser von 1,0 mm und damit die Querschnittsfläche $A = \pi \cdot (0,5 \text{ mm})^2 = 7,85 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$. Sie ist eine nicht mit Metall umspinnene Nylonsaite (etwas ungewöhnlich für die d -Saite einer Gitarre) und hat daher eine Dichte $\rho = 1140 \text{ kg/m}^3$. Damit folgte als Zugkraft $T = \rho A c^2 = 1140 \cdot 7,85 \cdot 10^{-7} \cdot 191^2 \text{ kgm/s}^2 = 32,6 \text{ N}$, ein durchaus plausibler Wert. Im Übrigen sind auch die Frequenzen $f_2(x_0 = 0)$ und $f_3(x_0 = 0)$ der Obertöne, wie erwartet, in etwa das Doppelte (296 Hz) bzw. Dreifache (441 Hz) der Grundfrequenz 147 Hz.

2.2 Frequenz f_1 der Grundschiwingung als Funktion der Masse m

Der Fall $x_0 = L/2$ bedeutet, dass sich die Punktmasse – realisiert durch die schon erwähnte Aluminium-Klammer – genau in der Mitte der Saite befindet. Für diesen Fall wurde experimentell untersucht, wie die Frequenz f_1 der Grundschiwingung von der Masse m der Klammer abhängt. Gemessen wurde für einige Werte von m zwischen 0,04 und 0,4 g (Gramm). Das Ergebnis zeigt Tabelle 2.

Tabelle 2 Messdaten: Frequenz f_1 der Grundschiwingung einer Gitarrensaite (Nylon- d -Saite, Länge $L = 0,65$ m), die in der Mitte ($x_0 = L/2$) mit einer Punktmasse m belastet ist, als Funktion von m (g = Gramm).

m/g	f_1/Hz
0	147 ± 1
$0,04 \pm 0,01$	135 ± 2
$0,12 \pm 0,015$	124 ± 2
$0,15 \pm 0,015$	116 ± 2
$0,18 \pm 0,02$	110 ± 2
$0,25 \pm 0,02$	102 ± 2
$0,325 \pm 0,025$	94 ± 2

Die Daten zeigen, dass die Frequenz f_1 mit wachsender Masse abnimmt. Dies folgt auch aus der Theorie: Im Fall $x_0 = L/2$ sind die beiden Terme auf der linken Seite von Gleichung (15) identisch, so dass sie zu

$$2 \cot\left(\frac{kL}{2}\right) = \frac{m k c^2}{T}$$

wird. Mit $c^2 = T/(\rho A)$, siehe Gleichung (17), folgt

$$\frac{m k c^2}{T} = 2 \frac{m}{\rho A L} \left(\frac{kL}{2}\right)$$

und die Gleichung vereinfacht sich zu

$$(18) \quad \cot\left(\frac{kL}{2}\right) = \frac{m}{\rho A L} \left(\frac{kL}{2}\right) .$$

In dieser nehmen wir die oben genannten Größen $\rho = 1140 \text{ kg/m}^3$, $A = 7,85 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$ und $L = 0,65 \text{ m}$ als gegeben an, berechnen für einige Werte von m den Faktor $m/(\rho AL)$ und bestimmen numerisch die Lösung $(kL/2)_1$ für die Grundschiwingung. Diese ist in Tabelle 3 aufgeführt (dritte Spalte). Wegen

$$\frac{kL}{2} = \frac{2\pi f L}{c} \frac{L}{2} = \frac{\pi L}{c} f$$

ergibt sich daraus

$$(19) \quad f_1(x_0=L/2) = \frac{c}{\pi L} \left(\frac{kL}{2} \right) .$$

In Tabelle 3 sind einige dieser so berechneten Frequenzen aufgeführt.

Tabelle 3 Theoretische Rechnung: Numerische Lösung $(kL/2)_1$ der Gleichung (18) für die Grundschiwingung im Fall $x_0 = L/2$ und Umrechnung auf die Frequenz f_1 gemäß Gleichung (19). Zahlenwerte: $\rho AL = 5,8169 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$, $c = 191 \text{ m/s}$, $c/(\pi L) = 93,58 \text{ Hz}$

m/kg	m/(\rho AL)	Lösung $(kL/2)_1$	$f_1(x_0=L/2)$ /Hz
$1 \cdot 10^{-4}$	0,172	1,3437	125,7
$2 \cdot 10^{-4}$	0,344	1,1842	110,8
$3 \cdot 10^{-4}$	0,516	1,0675	99,90
$4 \cdot 10^{-4}$	0,688	0,9785	91,57

Abbildung (5) gestattet einen Vergleich zwischen Experiment und Theorie. Aufgetragen ist die Frequenz f_1 für $x_0 = L/2$ als Funktion von m . Die Messdaten (Tabelle 2) sind durch schwarze Punkte mit Fehlerbalken dargestellt, die Theorie durch die rote Ausgleichskurve – die Anpassung eines Polynoms zweiter Ordnung an die berechneten Frequenzen (Tabelle 3).

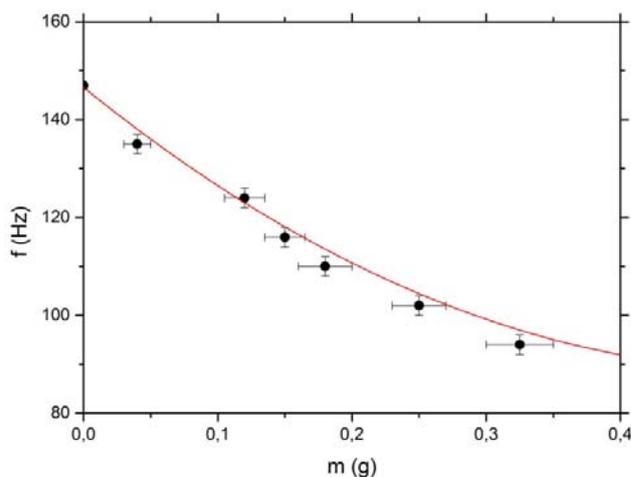


Abbildung 5 Frequenz f_1 für $x_0 = L/2$ als Funktion von m . Schwarze Punkte (mit Fehlerbalken): Messdaten (Tabelle 2), rote Kurve: Theorie, das heißt Anpassung eines Polynoms zweiter Ordnung an die berechneten Frequenzen (Tabelle 3). Details siehe Text.

Die Abbildung zeigt, dass Theorie und Experiment zwar grob, aber nicht vollständig übereinstimmen. Das ist, wie schon erwähnt, durch die Unsicherheiten der vorgegebenen Parameter bedingt. Immerhin konnte das nicht ganz alltägliche Phänomen der schwingenden, mit einer punktförmigen Masse belasteten Saite untersucht und mit der Theorie verglichen werden.

Anmerkungen und Literatur

- ¹ McGraw Hill: *Acces Engineering Library, Transverse Vibration of Strings*, Abschnitt 2.7 »Discontinuous Strings«, <https://www.accessengineeringlibrary.com>
- ² Gidion, G.: *Akustische Resonatoren zur Analyse und Kontrolle von Schwingungsfähigen Systemen am Beispiel von Streichinstrumenten und Dielektrischen Elastomeraktoren*, [https://publishup.uni-potsdam.de > index > index > docId](https://publishup.uni-potsdam.de/index/index/docId)
- ³ Spectrogram ist ein Freeware-*FFT*-Programm, benutzte Version *Spectrogram 16.0*, kann heruntergeladen werden von <http://ptf.com/spectrogram/spectrogram+16+windows+7/>